ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ECOLES SUPERIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1987 — **COMPOSITION DE MATHEMATIQUES** — *Durée : 4 heures*

NOTA : Les deux problèmes sont indépendants.

La partie C du problème n° 1 est indépendante des parties A et B.

La partie B du problème n° 1 peut être traitée sans connaître les résultats de la partie A ; mais il est préférable de traiter les parties A et B dans cet ordre.

»»»»»»»»»»o«««««««««««

PROBLEME N° 1

L'espace affine euclidien réel de dimension trois est rapporté au repère cartésien $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; les axes de coordonnées sont $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$, de vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

On considère la surface S d'équation cartésienne :

$$y = x \left[\operatorname{ch}(x-z)\right]^{\frac{1}{x}} , \quad x \neq 0 .$$

A — $h \in \mathbb{R}^*$; soit C_h la courbe section de S par le plan d'équation $z = h$.

1 — Montrer que les projections orthogonales des courbes C_h sur le plan $x\,O\,y$ sont tangentes à la droite d'équation $y = x$.

2 — Etudier les branches infinies des courbes C_h . On distinguera les deux cas : $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$.

On donnera les équations des asymptotes, la position de la courbe par rapport à chaque asymptote.

On discutera suivant h .

Montrer que, quand h varie, les asymptotes trouvées appartiennent à deux plans fixes dont on donnera les équations.

3 — Donner le tableau de variation de la fonction $x \longmapsto y = x \left[\operatorname{ch}(x-h)\right]^{\frac{1}{x}}$.

On ne demande pas une valeur numérique approchée du nombre α qui annule la dérivée y'_x ; on précisera seulement le signe de $y(\alpha)$. On ne demande pas de tracer C_h .

4 — On se place dans le cas où $h = \operatorname{Log} 2$, où Log désigne le logarithme népérien.

Etudier les variations de la fonction

$$x \longmapsto w(x) = x \operatorname{th}(x-h) - \operatorname{Log}\operatorname{ch}(x-h)$$

pour $x < 0$.

En déduire, en étudiant les variations de la fonction

$$x \longmapsto m(x) = \left[\operatorname{ch}(x-h)\right]^{\frac{1}{x}}$$

pour $x < 0$, que la branche de la courbe $C_{\operatorname{Log}2}$ qui correspond à $x < 0$ est située dans l'angle de deux demi-droites issues de O que l'on précisera.

Tracer la courbe $C_{\operatorname{Log}2}$. On ne demande pas l'étude de la concavité.

B — Dans cette partie, $h = 0$; on étudie la courbe C_0 .

1 — Donner le développement limité à l'ordre quatre, au voisinage de zéro, de la fonction :

$$x \longmapsto y = x(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}} .$$

2 — En utilisant les résultats de la partie A, donner le tableau de variation relatif à C_0 , préciser les branches infinies et l'angle dans lequel se trouve la branche de C_0 relative à $x < 0$.

On admettra que, pour $x < 0$, C_0 coupe l'asymptote correspondant à $x \to -\infty$ en un seul point dont on ne cherchera pas à calculer l'abscisse.

Tracer la courbe C_0 . On n'étudiera pas la concavité.

3 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$; M_n et M_{n-1} sont les points de C_0 d'abscisses respectives n et $n+1$. La droite de pente e ($\operatorname{Log} e = 1$) menée par M_{n+1} coupe en P_n la parallèle menée par M_n à Oy .

Quand $n \to +\infty$, $\frac{1}{n}$ étant l'infiniment petit principal, trouver un équivalent de l'aire A_n du domaine plan limité par les segments M_nP_n , P_nM_{n+1} et l'arc M_nM_{n+1} de la courbe C_0 .

On pourra utiliser la fonction $x \longmapsto \eta(x)$ telle que, quand $x \to +\infty$, $y = ex - e\operatorname{Log}2 + \eta(x)$.

T.S.V.P.

C — On appelle Γ la courbe de contact de S et du cylindre de génératrices parallèles à la droite D ($y = 0$, $z = x$) tangent à S (cylindre circonscrit à S et de generatrices parallèles à D). Le cylindre et S sont tangents le long de Γ .

1- Montrer que Γ est une courbe plane et donner l'équation de son plan.

2— Soit γ la projection orthogonale de Γ sur le plan xOz . Construire γ .

On pourra utiliser une representation paramétrique de γ ou une équation de la forme $x = f(z)$.

On précisera les asymptotes.

Trouver une propriété géométrique simple de la courbe γ .

3— Soit M_1 et M_2 deux points de Γ ayant même abscisse x_0 .

Montrer que les plans tangents à S en M_1 et M_2 se coupent suivant une parallèle à D située dans le plan $z = x$.

PROBLEME N° 2

E est l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels muni de l'addition et de la multiplication matricielles et de la multiplication par un réel.

A est le groupe multiplicatif des matrices inversibles de E. $\mathbb{R}^*$ est le groupe multiplicatif des nombres réels ; $\mathbb{R}_+^*$ le groupe multiplicatif des nombres réels strictement positifs.

$T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est le groupe additif des nombres réels modulo 2π .

Si $X \in E$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $D(X) = ad - bc$.

1 — Vérifier que les quatre matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

forment une base de E.

Toute matrice X de E s'écrit $X = x_0 I + x_1 J + x_2 K + x_3 L$; x_0 , x_1 , x_2 , x_3 sont quatre réels uniques.

Calculer x_0 , x_1 , x_2 , x_3 en fonction de a , b , c , d.

Calculer $D(X)$ en fonction de x_0 , x_1 , x_2 et x_3 .

Exprimer à l'aide d'une des matrices I , J , K ou L , les puissances K^2 , L^2 et les produits JK , KJ , LJ et JL .

2 — Soit $\theta \in T$; demontrer que l'application R de T dans A définie par :

$$R(\theta) = \cos\theta \cdot I + \sin\theta \cdot J$$

est un homomorphisme injectif de T dans A .

Exprimer les produits de matrices :

$$R\left(-\frac{\theta}{2}\right) J \; R\left(\frac{\theta}{2}\right) \; ; \; R\left(-\frac{\theta}{2}\right) K \; R\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } R\left(-\frac{\theta}{2}\right) L \; R\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

respectivement en fonction des matrices J , K et $R(\theta)$, L et $R(\theta)$.

Soit U l'application de $\mathbb{R}_+^* \times T$ dans A définie par :

$$U(s, \theta) = s R(\theta) .$$

Comparer le produit $U(s, \theta) \; U(s', \theta')$ à $U(ss', \theta + \theta')$

Chercher les antécédents, par U , de la matrice I .

Comparer $K U(s, \theta) K$ avec $U(s, -\theta)$.

3 — $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = x_0 I + x_1 J + x_2 K + x_3 L$.

Caractériser les matrices X telles que $XJ = JX$ (dans E).

Montrer qu'il y a identité entre les éléments de l'image par U de $\mathbb{R}_+^* \times T$ et les solutions de l'équation (dans E) :

$$X^{-1} J X = J .$$

4 — Soit $t \in \mathbb{R}$; l'application S de $\mathbb{R}$ dans A est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad S(t) = \operatorname{ch} t \; I + \operatorname{sh} t \; K$$

Montrer que S est un homomorphisme injectif de $\mathbb{R}$ dans A .

Montrer que l'application V de $\mathbb{R}^*$ dans A définie par :

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^* \quad , \quad V(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

est un homomorphisme injectif de $\mathbb{R}^*$ dans A .

Soit $W(t, \sigma) = S(t) V(\sigma)$; comparer

$$\left[W(t, \sigma)\right]^{-1} \quad \text{avec} \quad V\left(\frac{1}{\sigma}\right) S(-t) .$$

Expliciter la matrice

$$J(t, \sigma) = \left[W(t, \sigma)\right]^{-1} J W(t, \sigma) \text{ en fonction de } t \text{ et } \sigma .$$

5 — Expliciter les solutions de l'équation

$$X^2 = -I .$$

en fonction de deux paramètres réels, $t \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^*$.
(On se place dans E) .

ECOLES de TRAVAUX PUBLICS: E.S.T.P.
Composition
page 167
1987